20230903炼石计划NOIP模拟赛1题解

T1. 岛屿

首先，初始存在的边形成一个完美匹配。按题意要求，新加上去的边也必须形成一个完美匹配。所以，最后得到的图是两个完美匹配的并，也就是说，最后的图中每个点的度数一定都为 2。因为图是有限大的并且每个点度数为 2，最后的每个连通块必然恰好是一个大小至少为 2 的环。

我们考虑连边过程。连上一部分新边之后，图中一定是若干条链和若干个环。已经成环的部分对之后的连接情况没有影响，而一条链对之后连接情况的影响只和两端颜色有关。也就是说，我们只需要知道一个状态中红红、红蓝、蓝蓝三种链各有多少条，就知道之后的连接过程中它的连通块数的数学期望。按题意，红红和蓝蓝的边数总是相等的。

因此，我们设 $F(a,b)$ 表示初始有 a 条红红链、a 条蓝蓝链和 b 条红蓝链的图等概率随机连接红蓝边后的期望连通块数。则答案为 $F(X,Y)$。

考虑第一步的连接情况：

- 如果是红红和蓝蓝连接，则新的链为红蓝，连通块数为 $F(a-1,b+1)$；
- 如果是红红和红蓝连接，则新的链为红红，连通块数为 $F(a,b-1)$；
- 如果是蓝蓝和红蓝连接，则新的链为蓝蓝，连通块数为 $F(a,b-1)$；
- 如果是红蓝和红蓝连接，则新的链为红蓝，连通块数为 $F(a,b-1)$（两条不同的红蓝链）或者 $F(a,b-1)+1$（同一条红蓝链首尾相连）；

而等概率随机等价于按某个固定顺序给每个红端点独立随机匹配一个蓝端点。那么，不妨优先选择红蓝链的端点匹配。所以，

$$F(a,b)=\begin{cases}\frac{1}{2a+b}(F(a,b-1)+1)+\frac{2a+b-1}{2a+b}F(a,b-1) & b>0\\ F(a-1,b+1) & b=0\end{cases}$$

化简，

$$F(a,b)=\begin{cases}\frac{1}{2a+b}+F(a,b-1) & b>0\\ F(a-1,1)=\frac{1}{2a-1}+F(a-1,0) & b=0\end{cases}$$

并且，$F(0,0)=0$。

所以，$F(X,Y)=\sum_{b=1}^{Y}\frac{1}{2X+b}+\sum_{a=1}^{X}\frac{1}{2a-1}$。

时间复杂度：$O(N)$

> 注：实际上通过分析方法求调和级数可以做到更低时间复杂度，但本题不考虑。

T2. 小朋友

假设我们固定了最后剩下的小朋友个数为 k，则这种情况下最优方案为：首先串 S' 必须是 S' 所有子序列里字典序最大的。然后，在不同的值等于 S' 的子序列下标选择方式中，选择一种使 T' 的字典序最大。

这可以 DP 求出。设 $F(i,j)$ 表示 1 到 i 号小朋友保留 j 个的最优方案，最优方案指保证 S' 字典序最大的情况下让 T' 最大的串二元组 (S',T')。

枚举第 i 个小朋友是否留下即可从 $F(i-1,j)$ 和 $F(i-1,j-1)$ 转移。

朴素 DP 时间复杂度为 $O(N^3)$（状态转移 $O(N^2)$，单次字符串操作本身 $O(n)$）。

时间复杂度：$O(N^3)$

> 注：可以搜索子序列自动机来进一步了解这个问题。

T3. 列表

引理 1 一个列表子集 S 能够最后得到当且仅当：$|S|=N+1$，并且对于任意非负整数 i，列表初始中间一段下标 $[N+1-i,N+1+i]$ 的 $2i+1$ 个数中至少包含 $i+1$ 个 S 内的数。

> 证明：仅当：首先，可以证明第 $i+1$ 次操作加入 S 的元素初始下标一定在 $[N+1-i,N+1+i]$ 内。前 $i+1$ 次操作加入 S 的 $i+1$ 的数都在 $[N+1-i,N+1+i]$ 内，所以这个范围内至少 $i+1$ 个数。当：我们每次选择初始下标距离中心 $N+1$ 最近的一个不在 S 内的元素删除即可。因为初始下标 $[N+1-i,N+1+i]$ 内至多 N 个不在 S 的元素，所以第 $i+1$ 步之前这些不在 S 的元素一定删完了，留在中心的一定是 S 内的元素。

引理 2 一个列表子集 A 能够是最后 S 的子集当且仅当：对于任意非负整数 i，不在列表初始中间一段下标 $[N+1-i,N+1+i]$ 的数中至多包含 $N-i$ 个 A 内的数。

我们可以枚举连续数字段，然后判定是否合法。可能的连续数字段有 $O(N^2)$ 个。时间复杂度为 $O(N^2)$ 到 $O(N^3)$。

进一步地，我们可以考虑一个连续数字段的所有子集一定合法。所以每个左端点对应的最大合法右端点一定是单调的。双指针枚举端点，区间数据结构维护合法性可以做到 $O(N\log N)$。

时间复杂度：$O(N\log N)$

> 注：更进一步地推导可知最优解的更多性质。例如一般情况答案至少为 N。

T4. 种植

先去除那些起点不可达或者不可达终点的点，这些点可选可不选，最后答案乘上 2 的这类点数次方。然后把障碍物和不可达的点的四连通块缩点。找不可达和缩点过程可以队列维护：初始障碍不可达；如果一个点右下两个方向或者左上两个方向都不可达，则它也不可达。

然后平面图转对偶图。每个可达的点向它右上和左下相邻的可达点或者不可达连通块缩的点连边。

那么合法的集合数就是从左下角到右上角的路径数。

时间复杂度：$O(NM)$

> 注：在平面网格 DAG 上，对偶图链、图反链和图 separator 之间等价。这是二维偏序在 OI 中常用的一个特殊性质。